

## Inhaltsverzeichnis

<b>EINLEITUNG</b>	<b>2</b>
Anlässe, Motive und Zielsetzung dieser Arbeit	2
Überblick über die Kapitel und Empfehlungen zum Lesen	4
Dank und Würdigung	5
Ausgangspunkt Philosophie, Pädagogik und Mathematik	5
<b>1 DAS KARLSRUHER FORSCHUNGSKONZEPT ÄSTHETISCHE BILDUNG</b>	<b>8</b>
1.1 Bildung und Pädagogik – Erziehung und Unterricht	8
1.2 Ästhetik und Philosophie	10
1.3 Ästhetik und Pädagogik	15
1.4 Ästhetik und Neurobiologie	21
1.5 Zur ästhetischen Erfahrbarkeit der Welt	25
1.6 Das Drei-Welten-Modell nach Karl R. Popper	27
1.7 Ästhetisch verfasste Erziehungs- und Gestaltungsprinzipien	30
<b>2 ÄSTHETISCHE ERZIEHUNG UND MATHEMATIKUNTERRICHT</b>	<b>34</b>
2.1 Gesellschaftliches Bild von Mathematik	34
2.2 Mathematikunterricht und Allgemeinbildung	37
2.3 Allgemeinbildung über Grunderfahrungen	40
2.4 Fachdidaktik und Ästhetische Erziehung	43
2.5 Gestaltungsprinzipien für den Mathematikunterricht	48
2.5.1 Genetisches Lernen	48
2.5.2 Entdeckendes versus rezeptives Lernen	50
2.5.3 Fundamentale Ideen	54
2.5.4 Charakterisierung eines ästhetisch verfassten Lernprozesses	57
2.6 Ästhetisch verfasster Mathematikunterricht	58
2.7 Elemente des Spielerischen	60
<b>3 EIN MODELL FÜR LERNPROZESSE IM MATHEMATIKUNTERRICHT</b>	<b>62</b>
3.1 Ästhetische Fundierung von Lernprozessen	62
3.1.1 Bildung ist grundsätzlich ästhetisch verfasst	64
3.1.2 Der „hermeneutische Zirkel“ in Bezug auf fachliche Lernprozesse	65
3.1.3 Fachliche Entwicklung über „symmetrisierende Kommunikation“	68
3.2 Elemente des Modells	70
3.2.1 Mathematischer Modellierungskreislauf als Element fachlicher Motivation	71
3.2.2 Fachsprachliche Entwicklung	73
3.2.3 Basale Wahrnehmungsprinzipien und fachliche Methoden	77
3.2.4 Kognitive Entlastung	79
3.2.5 Einsatz elementarer Werkzeuge	81

3.2.6	Computerunterstützung für mathematische Darstellungsformen	83
3.2.7	Fachliche Entwicklung über „Erfinden“ und „Entdecken“	85
3.2.8	Ästhetische Gestaltung von Lernprozessen	87
3.2.9	Zusammenfassung	97
<b>3.3</b>	<b>Vom Raum zur Form – Körper und Figuren</b>	<b>97</b>
3.3.1	Mentale Verortung von Begriffen	98
3.3.2	Geometrische Formen und Elemente	98
3.3.3	Vermitteln zwischen räumlichen und ebenen Darstellungen	103
<b>3.4</b>	<b>Entwicklung des Zahlbegriffs</b>	<b>104</b>
3.4.1	Genetisch-historische Entwicklung der <i>Zählzahlen</i>	104
3.4.2	Zahlen in der Grundschule	111
3.4.3	Zahlen in den Klassen 5 und 6	113
<b>3.5</b>	<b>Fachdidaktik und ästhetische Verfasstheit von Lernprozessen</b>	<b>129</b>
3.5.1	Mathematisches Modellieren – Motivation für Fachliches	130
3.5.2	Fachinhaltliche Gliederung für die Klassen 5 bis 10	132
3.5.3	Logisches Denken und mathematisches Argumentieren	134
3.5.4	Lokales Ordnen als Basis für mathematisches Begründen	134
3.5.5	Strategien des logischen Begründens	135
3.5.6	Vernetzung von Begriffen des Alltags und Begriffen der Mathematik	137
3.5.7	Begriffsbildung Variable(n)	147
<b>3.6</b>	<b>Beziehungen und Zuordnungen – Gleichungen und Funktionen</b>	<b>153</b>
3.6.1	Aspekte: statisch, dynamisch, diskret, kontinuierlich	153
3.6.2	Lokale und globale Aspekte bei qualitativen Funktionsdarstellungen	156
3.6.3	Der Funktionsbaukasten und die Algebra der Terme	157
3.6.4	Modellierung dynamischer Vorgänge – neue Aspekte von Funktionen	159
<b>3.7</b>	<b>Aufbau, Wirksamkeit und Nachhaltigkeit der Fachlichkeit</b>	<b>170</b>
<b>4</b>	<b>UNTERRICHTSPRAXIS</b>	<b>174</b>
<b>4.1</b>	<b>Einstimmendes Beispiel, Bemerkungen und Überblick</b>	<b>174</b>
<b>4.2</b>	<b>Das Projekt „Einsatz eines CAS/GTR in der Sekundarstufe I“ am Gymnasium</b>	<b>177</b>
4.2.1	Rahmenbedingungen und Zielsetzungen	178
4.2.2	Fachinhaltliches Curriculum	179
4.2.3	Organisation von Lernprozessen – Erziehung zur Eigenverantwortung	179
4.2.4	Die Rolle des CAS / GTR – Der persönliche Experte	180
4.2.5	Dokumentation des Wissens – Werkzeugkarten	181
4.2.6	Strukturierung und Dokumentation von Unterrichtseinheiten	181
4.2.7	Stoffüberblick zum Schuljahr	182
4.2.8	Ausarbeitung eines Themas – Unterrichtsskript „Anteile und Prozente“	183
4.2.9	Rückschau und Erfahrungen	189
<b>4.3</b>	<b>Entwicklung des Zahlbegriffs in den Klassenstufen 1 bis 6</b>	<b>190</b>
4.3.1	Von der „Zählsprache“ zur „Zahlsprache“, Grundschule Klasse1	191
4.3.2	Zahldarstellungen und elementares Rechnen in Klasse 2	195
4.3.3	Einführung der Bruchzahlen über Grundvorstellungen	201
4.3.4	Die Bevölkerung der Zahlengeraden	204

---

<b>4.4</b>	<b>Vollwinkelmesser versus Multiwerkzeug Geodreieck</b>	<b>207</b>
<b>4.5</b>	<b>Was hat der Kreisumfang mit dem Radius zu tun?</b>	<b>210</b>
<b>4.6</b>	<b>Würfelnetze, Würfelkörper und Quaderhunde (Klasse 5-6)</b>	<b>211</b>
4.6.1	Würfelnetze können wir – aber wie viele gibt es? (Klasse 5-6)	211
4.6.2	Würfelkörper	214
4.6.3	Wir bauen einen Quaderhund	215
<b>4.7</b>	<b>Platonische Körper (Hector-Kurs, Klassenstufen 4 bis 6)</b>	<b>217</b>
<b>4.8</b>	<b>Statt zu messen denk' ich nach – Argumentieren lernen mit Geometrie</b>	<b>224</b>
<b>4.9</b>	<b>Wann ist ein Dreieck eindeutig bestimmt?</b>	<b>229</b>
<b>4.10</b>	<b>Der Zufall als Streitschlichter – Begriffsbildung Wahrscheinlichkeit</b>	<b>231</b>
<b>4.11</b>	<b>Funktionales Denken – Lineare Funktionen</b>	<b>234</b>
<b>4.12</b>	<b>Heron von Alexandria löst ein Geheimnis der Quadrate</b>	<b>238</b>
<b>4.13</b>	<b>Ein Extrablatt zum Satz des Pythagoras</b>	<b>242</b>
<b>4.14</b>	<b>Ableitung und Integral – lokal und global</b>	<b>244</b>
4.14.1	Lokale und globale dynamische Visualisierung der Ableitung einer Funktion	244
4.14.2	Integrieren als Umkehrung des Ableitens	246
<b>4.15</b>	<b>Übersicht zu Unterrichtsbeispielen in den Kapiteln 2 und 3</b>	<b>248</b>
<b>5</b>	<b>NACHBETRACHTUNGEN UND IMPLIKATIONEN</b>	<b>249</b>
<b>5.1</b>	<b>Rück- und Ausblicke</b>	<b>249</b>
<b>5.2</b>	<b>Auswirkungen auf den Mathematikunterricht</b>	<b>251</b>
<b>5.3</b>	<b>Ausbildung für Lehrende des Schulfachs Mathematik</b>	<b>255</b>
<b>5.4</b>	<b>Worte zum Schluss</b>	<b>256</b>
<b>5.5</b>	<b>Persönliche Erinnerungen und Dank</b>	<b>258</b>
<b>6</b>	<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS</b>	<b>261</b>
<b>7</b>	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>268</b>